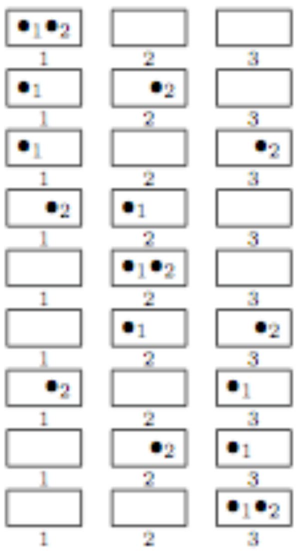
Introduzione

L'argomento è semplice, quasi infantile: abbiamo a disposizione un certo numero di palline da disporre in un insieme di scatole e ci chiediamo quanti modi ci sono per farlo. Affronteremo il problema in alcuni dei casi che si possono presentare considerando certe condizioni di distinguibilità delle palline e delle scatole e certi vincoli sulle condizioni di riempimento delle scatole.
Questo semplice paradigma ci consentirà di ottenere una serie di risultati importanti per il Calcolo Combinatorio. Costruiremo poi una vera e propria Tavola Pitagorica, anche se incompleta, del calcolo combinatorio. Lavoreremo sempre, salvo avviso contrario, con numeri finiti di palline e scatole.

1.Palline e Scatole Distinguibili

Abbiamo k palline distinguibili che vanno poste in n scatole distinguibili senza altro vincolo: è chiaro che la prima pallina (ricordiamo che non c'è nessun tipo di ordinamento, il numero serve solo a distinguere una pallina dall'altra e una scatola dall'altra) può essere sistemata in una qualsiasi delle n scatole, cioè in n modi. E la seconda? Poiché non ci sono vincoli anche per la seconda pallina abbiamo a disposizione tutte le n scatole e così per la terza fino alla $k$esima. Quindi il numero di modi in cui possiamo disporre k palline distinguibili in n scatole distinguibili, senza altri vincoli, è n^k.
Quanto esposto fin qui è ben evidenziato nella figura seguente:



Siano B = $\{1, 2, \ldots n\}$ e A = $\{1, 2, \ldots k\}$ rispettivamente gli insiemi delle scatole e delle palline: si intuisce che per ognuno degli assegnamenti considerati si può costruire una funzione da A a B. L'insieme delle funzioni da un generico insieme A a un generico insieme B è spesso indicato con B^A ed il numero di funzioni è dato dall'elegante formula $\#B^{\#A}$ con A e B, ripetiamolo, insiemi finiti.

1.2. Disposizioni con Ripetizione

Tradizionalmente la formula che abbiamo ottenuto corrisponde alle Disposizioni con Ripetizione di n elementi presi a k a k, indicate con il simbolo $D^r_{n;k}$, con k che può essere maggiore di n. Il tipico esempio è il problema 'Quante sono le colonne giocabili al Totocalcio?' Ci sono 3 elementi (1, 2, X) che possono essere presi a 13 alla volta, naturalmente con ripetizione: è come dover disporre in tre scatole distinguibili (i risultati 1, 2 e X), tredici palline distinguibili (le partite). La soluzione del problema è proprio 3^{13} e corrisponde al numero di funzioni che si possono costruire tra l'insieme delle partite (le palline), che sono tredici, e l'insieme dei risultati (le scatole), che sono tre, ed è evidente che un risultato può ripetersi quindi ci sono $n^k = 3^{13} = 1.594.323$ possibili colonne giocabili in una schedina. (Quanto si spenderebbe se volessimo giocarle tutte?)

Esempi
a. Quanti codici di due simboli, anche ripetuti, si possono costruire dai simboli ♦ • ∇?
Si tratta di inserire due palline distinguibili in tre scatole distinguibili quindi i codici sono $3^2 = 9$.
b. Quante sigle di tre simboli, anche ripetuti, si possono costruire dai simboli ▻ ◅?
Si tratta di inserire tre palline distinguibili in due scatole distinguibili (oppure di disporre, con ripetizione, due elementi a tre a tre) quindi i codici sono $2^3 = 8$.
c. Quanti numeri di tre cifre (anche ripetute) si possono ottenere dalle cifre 1, 2, 3, 4, 5?
Il problema è analogo al problema di inserire tre palline distinguibili in cinque scatole distinguibili quindi, con $n = 5$ e $k = 3$, i numeri che si possono costruire sono $5^3 = 125$.

1.3. Disposizioni

Consideriamo ora un primo vincolo sul tipo di riempimento delle scatole stabilendo che in ogni scatola possa esserci al più una pallina. Il problema si può interpretare anche così: come si possono disporre k palline distinguibili in n scatole, inizialmente vuote e distinguibili anch' esse, con la regola che in ogni scatola può esserci al più una pallina? Chiameremo *iniettivi* questi assegnamenti perché ciò corrisponde a considerare solamente funzioni iniettive e naturalmente se il numero di palline supera quello delle scatole, ovvero $n < k$, non c'è alcun assegnamento iniettivo. Se invece $n > k$ possiamo calcolare quanti sono i possibili assegnamenti iniettivi: la prima pallina può essere piazzata in una qualsiasi delle scatole quindi possiamo scegliere la sua posizione in n modi diversi, la seconda non può essere messa nella scatola in cui è già presente la prima, si violerebbe la regola di assegnamento, quindi potrà essere posta indifferentemente in una delle $n - 1$ scatole che sono rimaste vuote. Anche per la terza le scelte possibili escludono le due scatole già occupate quindi potremo scegliere tra le scatole non occupate, che sono $n - 2$ fino ad arrivare alla pallina $k$esima,
l'ultima, per la quale rimaranno $n - (k - 1) = n - k + 1$ scatole tra cui scegliere. In conclusione il numero dei modi per disporre k palline in n scatole, con le condizioni richieste, è il prodotto del numero di modi in cui possiamo disporre la prima per il numero di modi in cui possiamo disporre la seconda, per il numero di modi in cui possiamo disporre la terza e così via fino alla $k$esima, ovvero :
$n (n - 1) (n - 2) \cdots (n - k + 1)$
Questo prodotto è così importante nel Calcolo Combinatorio che ha un suo nome, si chiama di solito Fattoriale Decrescente .
Un altro modo di vedere il problema è chiedersi in quanti modi si possono scegliere k oggetti tra n, con $k < n$, tenendo conto dell'ordine di scelta, infatti gli oggetti sono distinguibili. Il ragionamento si ripete: il primo oggetto può essere scelto tra uno qualsiasi degli n oggetti quindi possiamo sceglierlo in n modi diversi, il secondo oggetto può essere scelto indifferentemente tra uno degli $n - 1$ oggetti che sono rimasti, per il terzo potremo scegliere tra $n - 2$ oggetti fino ad arrivare all'oggetto $k$esimo per il quale rimaranno $n - k + 1$ oggetti tra cui scegliere. La formula ottenuta è la stessa di prima e si indica con
$D_{n,k} = n (n - 1) (n - 2) \cdots (n - k + 1)$
Il simbolo $D_{n,k}$ si legge *D enne kappa* ovvero Disposizioni di n oggetti presi a k a k o anche Disposizioni di classe n e ordine k.
Questo numero $D_{n,k}$ rappresenta, come abbiamo già anticipato, il numero di Funzioni Iniettive tra l'insieme A delle palline e l'insieme B delle scatole.
In assenza di palline esiste un solo modo in cui possiamo disporle (e quindi una sola funzione), quello in cui tutte le scatole rimangono vuote . . .

Esempi

a. Quanti numeri di tre cifre non ripetute si possono ottenere dalle cifre 1, 2, 3, 4, 5?
Si tratta di assegnamento di tre palline distinguibili in cinque scatole distinguibili con la regola che in ogni scatola può esserci al più una pallina: i numeri che si possono costruire sono $D_{5,3} = 5 * 4 * 3 = 60$.
b. Quanti codici di due simboli diversi si possono costruire dai simboli ♦ • ∇?
Si tratta di disporre due palline distinguibili in tre scatole distinguibili quindi i codici sono $D_{3,2} = 3 * 2 = 6$.
c. Quante bandiere di tre colori si possono costruire avendo a disposizione sette colori?
Si tratta di disporre tre palline distinguibili in sette scatole distinguibili (oppure di prendere sette elementi a tre a tre tenendo conto dell'ordine) quindi le bandiere sono $D_{7,3} = 7 * 6 * 5 = 210$.

1.4. Permutazioni

Se il numero delle scatole è uguale al numero delle palline le funzioni saranno anche suriettive e quindi biettive; in termini di scelta di oggetti questa eventualità si indica con Permutazioni di n oggetti , in simboli si ha $D_{n,n} = P_n$ che è pari al prodotto di n per tutti i numeri che lo precedono fino ad arrivare a 1 (infatti per $k = n$ il termine $n - k + 1$ vale 1). Tale prodotto si indica con il simbolo $n!$ e si chiama Fattoriale di n o anche n fattoriale quindi $P_n = n\,(n - 1)\,(n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$
Sono proprietà del fattoriale: $\frac{n!}{(n-1)!} = n$ e $\frac{n!}{n} = (n-1)!$
Scriviamo ora la cosiddetta formula dei tre fattoriali, facilmente verificabile con la definizione di fattoriale appena introdotta: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Si calcolano con la formula delle permutazioni i problemi del tipo:
Quanti anagrammi si possono comporre con la parola ROMA ?
ovvero gli anagrammi di parole composte da lettere tutte diverse.

1.5. Permutazioni con Ripetizione

Quanti anagrammi si possono comporre con la parola MATEMATICA ? Alcuni dei dieci elementi da permutare sono ripetuti (due M e due T, tre A) quindi il numero degli anagrammi sarà $\frac{10!}{2!2!3!} = 151200$
In generale se gli elementi da permutare sono n di cui k_1 sono tra loro identici, k_2 sono tra loro identici, $\cdots$ k_m sono tra loro identici il numero delle permutazioni è

$$P_n^{k_1 \cdot k_2 \cdots k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

Esempi
a. Un byte \`e un insieme di otto bit che possono assumere il valore 0 oppure il valore 1. Trova il numero delle possibili configurazioni che può assumere un byte se i quattro dei bit che lo compongono sono uguali a 1 e i rimanenti quattro sono uguali a 0.
Sono le permutazioni di 8 elementi di cui 4 uguali e gli altri 4 uguali quindi $\frac{8!}{4!4!} = 70$
b. In quanti modi si possono sedere cinque persone su cinque sedie allineate?
Sono le permutazioni di 5 elementi non ripetuti quindi in 5! = 120 modi .
Se le cinque sedie dell'esempio precedente sono disposte in cerchio i modi per sedersi non sono $5! = 120$ ma $(5 - 1)! = 24$ perché non è individuato un punto di inizio per le sedie: ogni sedia può essere la prima e la scelta della prima sedia si può fare in cinque modi quindi il numero precedentemente trovato va diviso per cinque.

2. Palline Indistinguibili e Scatole Distinguibili

Occupiamoci ora di k palline indistinguibili da assegnare a n scatole distinguibili in modo iniettivo. Vogliamo utilizzare il risultato $D_{n,k}$, che rappresenta il numero di funzioni iniettive tra l'insieme A delle palline e l'insieme B delle scatole. Se rendiamo indistinguibili le palline assegnate alle scatole (per esempio cancellando i numeri che le contraddistinguono) i $k!$ assegnamenti che coinvolgono le stesse scatole ora ci appariranno uguali, infatti non si possono distinguere due permutazioni di oggetti uguali. Possiamo quindi ricavare il numero cercato dal numero già noto $D_{n,k}$ dividendolo per $k!$.

2.1. Combinazioni Semplici

Gli assegnamenti iniettivi di k palline indistinguibili in n scatole distinguibili si indicano con $C_{n,k}$ e prendono il nome di Combinazioni di n oggetti a k a k (o di Combinazioni di classe n e ordine k) : $C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!}$. Osserviamo che il numero $C_{n,k}$ corrisponde al coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ con l'uguaglianza: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Non è una coincidenza: il numero delle combinazioni di classe n e ordine k coincide col numero di sottoinsiemi di k elementi che possono essere estratti da un insieme di n elementi, con $n > k$. Questo numero può essere visto anche come il numero delle funzioni (strettamente) crescenti tra l' insieme A delle palline e l'insieme B delle scatole. Infatti per le funzioni iniettive che, a partire da palline numerate (distinguibili), coinvolgono le stesse scatole (e sono, come già visto, $k!$) si può scegliere quella che dispone le palline in ordine crescente ed assumerla come rappresentante di tutte le $k!$ funzioni di partenza. In questo modo si ricostruiscono proprio le combinazioni e procedendo al conteggio si ottiene naturalmente lo stesso risultato. Osserviamo che la proprietà dei coefficienti binomiali $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, facilmente verificabile con la definizione, ha un'interpretazione anche nei problemi di assegnamento, infatti i modi di disporre k palline in n scatole sono uguali ai modi di lasciare vuote $n - k$ scatole tra le n scatole disponibili!

Notiamo che si può scrivere anche $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Esempi

a. Da un mazzo di quaranta carte quante combinazioni di tredici carte si possono ottenere? L'ordine non conta quindi si tratta di prendere quaranta elementi a tredici alla volta: i modi sono $\frac{D_{40,13}}{13!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 12033222880$

b. In quanti modi di possono combinare tre colori avendone a disposizione sette ? L'ordine non conta quindi si tratta di prendere sette elementi a tre a tre: i modi sono $\frac{D_{7,3}}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$

c. Quante differenti insalate si possono fare con i seguenti tipi: lattuga, scarola, indivia, romana e cicoria? Si può scegliere un'insalata su cinque, o due su cinque o · · · cinque su cinque. Il numero richiesto sarà allora

$C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5} = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$

Osserviamo che per ogni numero intero positivo n

$C_{n,1} + C_{n,2} + C_{n,3} + \cdots + C_{n,n} = 2^n - 1$

2.2. Insieme delle Parti e Binomio di Newton

Ricordiamo che tutti i sottoinsiemi, propri e impropri, di un insieme S costituiscono a loro volta un insieme, detto *Insieme delle Parti* o *Insieme Potenza* di S che viene indicato con P(S) o più frequentemente con 2^S . I sottoinsiemi di un insieme possono essere ripartiti secondo il numero degli elementi che contengono. Come esempio consideriamo l'insieme delle parti dell'insieme *{a, b, c}* e scriviamolo nel modo seguente:

{a, b, c}
{a, b} {a, c} {b, c}
{a} {b} {c}
$\varnothing$

Notiamo che tra i sottoinsiemi ci sono l'insieme vuoto e l'insieme stesso, poi i tre sottoinsiemi *{a}, {b}* e *{c}* che contengono un solo elemento (e perciò sono chiamati singoletti), i tre sottoinsiemi di ordine 2 che sono *{a, b}, {a, c}* e *{b, c}.* La risposta alla domanda di quanti siano i sottoinsiemi, di un insieme, che contengano un dato numero di elementi è fornita dai coefficienti binomiali .
Questi numeri sono ben noti fin dalla scuola media, dove si impara a calcolarli con il Triangolo di Tartaglia (di Pascal per i francesi!). Eccone la prime righe:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

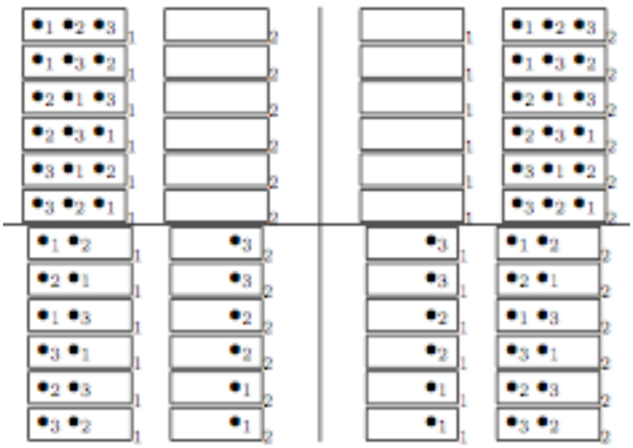
I valori della quarta riga corrispondono alla ripartizione dei sottoinsiemi di *{a, b, c}* che abbiamo appena eseguito.
Se ricordiamo lo sviluppo delle potenze di un binomio è facile comprendere l'uso della tabella per calcolare $(a + b)^n$. Per esempio si ha
$(a + b)^0 = 1$
$(a + b)^1 = a + b$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$
Si nota una regolarità e si può utilizzare tale regolarità per sviluppare la potenza di un binomio con esponente n qualsiasi.
Se indichiamo, in generale, il numero di sottoinsiemi di k elementi che si possono estrarre da un insieme di n elementi con il simbolo $\binom{n}{k}$ che si legge n-binomiale-k o anche n sopra k, la tabella precedente si può anche scrivere in questo modo:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

Osserviamo che la somma dei coefficienti della riga *n*esima è 2^n si può vedere tale somma come lo sviluppo della potenza $(1+1)^n$.

2.3. Combinazioni con Ripetizione

Continuiamo ad esaminare il caso di palline indistinguibili da assegnare a scatole distinguibili, senza il vincolo dell'iniettività e ricorriamo ad un artificio utile: si attribuisce un ordinamento alle palline, per esempio numerandole in ordine crescente, in modo da poter esaminare la prima pallina, la seconda e così via. Allora la prima pallina si potrà disporre in n modi e la seconda? Per la seconda i modi sono $n + 1$ perché oltre alle $n - 1$ scatole rimaste vuote possiamo decidere di porre la pallina nella scatola già occupata e lo possiamo fare in due modi, possiamo metterla a destra o a sinistra della prima pallina, rispettando o meno l'ordinamento imposto all'inizio. Quindi per due palline ci sono $n(n + 1)$ assegnamenti ordinati. Per la terza pallina, se le prime due palline sono state messe in scatole diverse, ci sono $n - 2$ scelte per le scatole rimaste vuote e quattro se si sceglie una delle scatole occupate per un totale di $(n + 2)$ modi oppure, se le prime due palline sono state messe nella stessa scatola, le scelte sono $n - 1$, come le scatole vuote più tre nel caso che si scelga la scatola occupata dalle due palline precedenti (a destra, a sinistra e in mezzo) per un totale, ancora, di $(n + 2)$ modi. Ci sono allora $n(n + 1)(n + 2)$ assegnamenti ordinati di tre palline in n scatole. Andando avanti, per k palline gli assegnamenti ordinati sono $n(n + 1)(n + 2) \cdots (n + k - 1)$ (questo numero si chiama Fattoriale Crescente). In figura \`e riportato un esempio, tre palline in due scatole:



Non dimentichiamo che le palline sono indistinguibili, quindi dalla situazione in figura arriviamo, cancellando i numeri, alla situazione seguente:

L'operazione è, ancora una volta, la divisione per $k!$ del fattoriale crescente e si ottiene

$$C^r{}_{n,k} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Si tratta di *Combinazioni con Ripetizione*, l'ordine non conta.

Esempi

a. Come possono essere distribuite tre caramelle, identiche, ad altrettanti bambini?
Si tratta di $C^r{}_{3,3} = 10$

b. In quanti modi si può comporre una coppa fatta da due palline di gelato se si hanno a disposizione i gusti ananas, banana, cocco e dietetico? Si tratta di $C^r{}_{4,2} = 10$

Appendice: Proprietà dei Coefficienti Binomiali

a. Formula dei tre fattoriali: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

b. Formula delle classi complementari: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

c. $\binom{n}{0} = 1;\quad \binom{n}{1} = n;\quad \binom{n}{n} = 1;$

d. Formula di Stifel $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ o anche $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

e. Formula di ricorrenza: $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$

Riassumiamo i risultati fin qui ottenuti in una tabella, la **Tavola Pitagorica del Calcolo Combinatorio,** in cui A è l'insieme delle k palline, B è l'insieme delle n scatole e le lettere I e D sono le abbreviazioni di *Indistinguibili* e *Distinguibili* :

Tavola Pitagorica del Calcolo Combinatorio

k n	indice di occupazione: arbitrario	indice di occupazione: 0/1
D D	$D^r_{n,k} = n^k$ Disposizioni con ripetizione Numero di funzioni da A a B	$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ Disposizioni di ordine n e classe k Numero di funzioni iniettive da A a B
I D	$C^r_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$ Combinazioni con ripetizione Numero di funzioni non decrescenti da A a B	$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \binom{n}{k}$ Combinazioni Semplici Numero di funzioni crescenti da A a B

Questa tabella fa parte di una Tavola Pitagorica del Calcolo Combinatorio più estesa che si trova nel libro di D'Antona intitolato *Introduzione alla matematica discreta* che comprende i casi di palline distinguibili e scatole indistinguibili e di palline e scatole entrambe indistinguibili nonché indici di occupazione positivi (tutte le scatole devono contenere almeno una pallina).